Logaritamski izvod

Za traženje izvoda neke funkcije često je potrebno naći logaritam te funkcije, a zatim rezultat prodiferencirati.
Neka je data funkcija $y = f(x) > 0$. Nađimo logaritam ove funkcije: $\ln y = \ln f(x)$.
Izračunajmo izvod funkcije $\ln f(x)$:

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x).$$

Odavde je $\boxed{f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))'}$ ili

$$\boxed{y' = y \cdot (\ln y)'}$$

Primjer 1) Nađi izvod funkcije $y = x^x$, $x > 0$.

Rješenje Nađimo prvo funkciju $\ln y$:

$\ln y = x \ln x$. Prodiferencirajmo po x ovu jednačinu: $\frac{y'}{y} = (x \ln x)' \Rightarrow$

$$y' = y\left(\ln x + \frac{x}{x}\right) \Rightarrow \boxed{y' = x^x(1 + \ln x)}$$

2) Nađi izvod funkcije $y = \dfrac{(x^2+2)\sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(x+5)^3}$.

Rješenje Nađimo $\ln y$

$$\ln y = \ln(x^2+2) + \frac{3}{4}\ln(x-1) + x - 3\ln(x+5) \Big/ '_x$$

$$y' \cdot \frac{1}{y} = \frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + 1 - \frac{3}{x+5}$$

Odakle dobijamo:

$$y' = y\left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right), \text{ odnosno}$$

$$y' = \frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}\cdot\left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right)$$

Uopšteno, za funkciju $f(x) = u(x)^{v(x)}$, $u(x) > 0$,

$\ln f(x) = v(x)\ln u(x)$. Odavde je

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}, \text{ odnosno}$$

$$\boxed{\left(u(x)^{v(x)}\right)' = u(x)^{v(x)}\cdot\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]}$$

<u>Primjer</u> Nađi izvod funkcije $y = (\sin 2x)^{x^2+1}$.

<u>Rješenje</u> Nađimo $\ln y$:

$$\ln y = (x^2+1)\ln(\sin 2x)$$

$$\frac{y'}{y} = 2x\ln(\sin 2x) + (x^2+1)\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}$$

$$y' = (\sin 2x)^{x^2+1}\left[2x\ln(\sin 2x) + (x^2+1)2\,\mathrm{ctg}\,2x\right]$$

Izvodi višeg reda

Izvod $y' = f(x)$ je prvi izvod (ili izvod prvog reda) funkcije $y = f(x)$, koja je takođe funkcija od x. Ako je funkcija $f'(x)$ diferencijabilna, onda se njen izvod naziva izvodom drugog reda ili drugim izvodom i označava se sa y'', ili $f''(x)$. Znači $y'' = (y')'$ ili $f''(x) = (f'(x))'$

Dalje, $f'''(x) = \left(f''(x)\right)'$, ako postoji taj izvod.

itd...

Znači, izvod n-tog reda ili n-ti izvod funkcije $f(x)$ je prvi izvod $(n-1)$-og izvoda funkcije f u tački x,

tj. $$\boxed{f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Primjer Naći četvrti izvod funkcije ~~f(x)~~

$$f(x) = x^4 + \ln^3 x$$

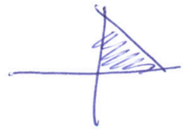
Rješenje $f'(x) = 4x^3 + 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$

$$f''(x) = 12x^2 + 6\ln x \cdot \frac{1}{x^2} - 3\ln^2 x \, \frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = 24x + \frac{6}{x^3} - 6\ln x \cdot \frac{(+2)}{x^3} - 6\ln x \, \frac{1}{x} + 6\ln^2 x \, \frac{1}{x^3}$$

$$f^{(IV)}(x) = 24 - \frac{18}{x^4} - \frac{12}{x^4} + \frac{36}{x^4} - \frac{6}{x^2} + \frac{6}{x^2} + 12\ln x \, \frac{1}{x^3} -$$

$$- 18\ln^2 x \, \frac{1}{x^4}.$$



Diferencijal funkcije

Neka funkcija $y = f(x)$ ima izvod u tački x_0 različit od nule, tj $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \neq 0$. Tada po teoremi o vezi granične vrijednosti funkcije i beskonačno male funkcije slijedi da je $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, gdje $\alpha(\Delta x) \to 0$, kad $\Delta x \to 0$. Odavde je

$$\boxed{\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot \Delta x}$$

Znači, priraštaj funkcije $\Delta f(x_0)$ je suma sabiraka $f'(x_0)\cdot\Delta x$ i $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, gdje je drugi sabirak beskonačno mala funkcija, kad $\Delta x \to 0$. Prvi sabirak je beskonačno mala funkcija istog reda kao i Δx pošto je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = f'(x_0) \neq 0$, a drugi sabirak je beskonačno mala funkcija višeg reda od Δx, jer je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Prema tome, sabirak $f'(x_0)\cdot\Delta x$ se naziva glavnim linearnim dijelom priraštaja $\Delta f(x_0)$ po Δx.

<u>Definicija</u> Diferencijal funkcije $f(x)$ u tački x_0 naziva se glavni linearni dio priraštaja $\Delta f(x_0)$ funkcije $f(x)$ u tački x_0 i označava se sa $df(x_0)$, tj

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x = f'(x_0)(x - x_0)}$$

ili $\boxed{dy = f'(x_0)\cdot\Delta x}$

Pošto je za $y = x$, $y' = x' = 1$, po prethodnoj formuli $dy = dx = \Delta x$, tj priraštaj nezavisne promjenljive je jednak njenom diferencijalu, odnosno $dx = \Delta x$.

Prema tome,

$$dy = d f(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$$

ili $dy = f'(x_0)dx$.

Znači,

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{dy}{dx}}$$

Drugim riječima, diferencijal funkcije je jednak proizvodu izvoda funkcije u toj tački i diferencijala nezavisne promjenljive.
Pokazali smo i da je izvod funkcije $f(x_0)$ u tački x_0 jednak odnosu diferencijala funkcije i diferencijala nezavisne promjenljive.

Primjer 1) Naći diferencijal funkcije

$$f(x) = 3x^2 - \sin(1+2x)$$

Rješenje $dy = f'(x)dx$.

$$dy = \left(3x^2 - \sin(1+2x)\right)'dx = \left(6x - 2\cos(1+2x)\right)dx$$

2) Naći diferencijal funkcije $y = \ln(1+e^{10x}) + \sqrt{x^2+1}$ i zatim izračunati dy u tački $x=0$ pri $dx=0{,}1$.

Rješenje

$$dy = \left(\frac{10e^{10x}}{1+e^{10x}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$$

Zamijenimo $x=0$ i $dx=0{,}1$. Tada dobijamo:

$$dy\Big|_{\substack{x=0\\dx=0{,}1}} = \left(\frac{10}{2}+0\right)\cdot 0{,}1 = 0{,}5$$

Osnovna svojstva diferencijala

1) Neka su f i g diferencijabilne funkcije. Tada važi:

a) $d(f \pm g) = df \pm dg$

b) $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$

c) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2} \quad (g \neq 0)$

Primjena diferencijala za približno računanje vrijednosti funkcije

Pošto je priraštaj funkcije u tački x_0 jednak:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)dx + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \text{ gdje } \alpha(\Delta x) \to 0 \text{ kad } \Delta x \to 0$$

Imamo da je

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + df(x_0) + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Odavde je

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0).$$

Primjer Izračunati približno $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

Rješenje Razmatraćemo funkciju $f(x) = \operatorname{arctg} x$

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + (\operatorname{arctg} x)' \Delta x \quad \text{tj.}$$

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+x^2} \cdot \Delta x$$

Uzmimo $x = 1$, $\Delta x = 0{,}05$, $x + \Delta x = 1{,}05$. Tada je

$$\operatorname{arctg} 1{,}05 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{0{,}05}{1+1} = \frac{\pi}{4} + 0{,}025 \approx 0{,}810$$

Diferencijali višeg reda

Diferencijal od diferencijala funkcije $f(x)$ naziva se diferencijalom drugog reda ili drugim diferencijalom funkcije $f(x)$ i označava se sa $d^2f(x)$ ili d^2y. Znači, $d^2f(x)=d(df(x))$ ili $d^2y=d(dy)$.

Pošto je $dx=\Delta x$, onda imamo

$$d^2f(x)=d(df(x))=d(f'(x)dx)=(f'(x)dx)'dx=$$
$$=f''(x)dx^2, \quad dx^2=dx\cdot dx=(dx)^2$$

jer $dx=\Delta x$ ne zavisi od x. $(dx^2\neq d(x^2))$

Dalje, $d^3f(x)=d(d^2f(x))=d(f''(x)dx^2)=$
$$=(f''(x)dx^2)'dx=f'''(x)dx^3$$

Uopšteno,

$$d^nf(x)=d(d^{(n-1)}f(x))=d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1})=f^{(n)}(x)dx^n$$

tj $\boxed{d^nf(x)=f^{(n)}(x)dx^n}$

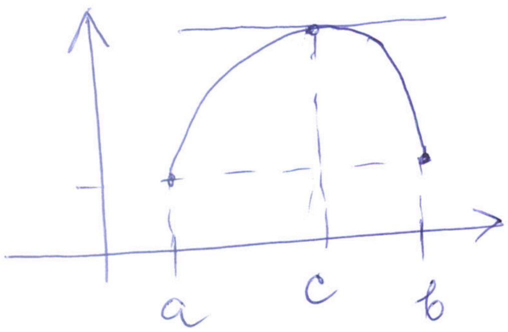
Primjer Naći $d^2f(x)$ ako je $\;=e^{3x}$.

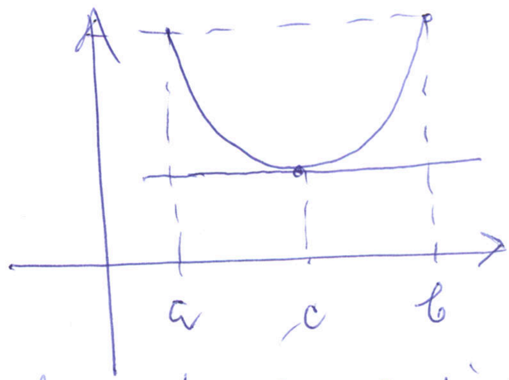
Rješenje $f'(x)=3e^{3x}$, $f''(x)=9e^{3x}$;

$$d^2f(x)=9e^{3x}dx^2$$

Osnovne teoreme diferencijalnog računa

Teorema (Rolova) Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a,b]$, diferencijabilna na (a,b) i na krajevima intervala $[a,b]$ ima jednake vrijednosti $f(a)=f(b)$. Tada postoji tačka $c\in(a,b)$, takva da je $f'(c)=0$.

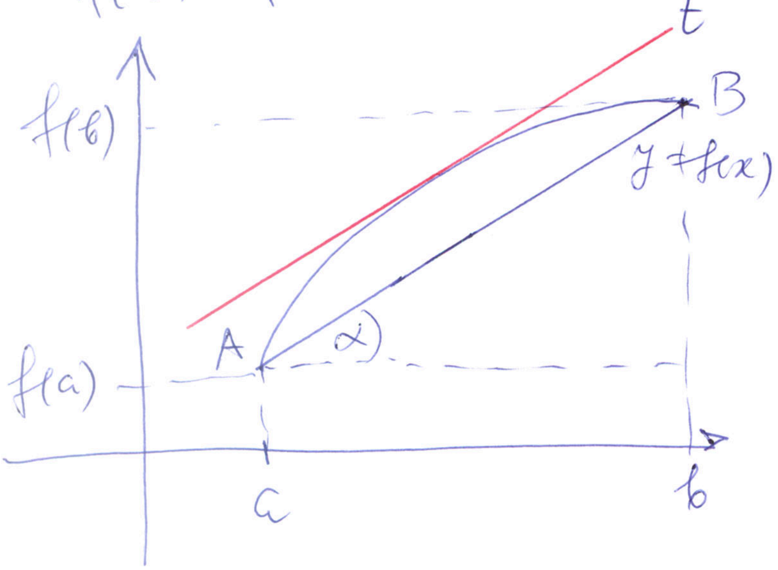




Geometrijski smisao Rolove teoreme je da postoji tačka $c\in(a,b)$ takva da je u toj tački tangenta na grafik funkcije $y=f(x)$ paralelna x-osi.

Teorema (Lagranžova) Neka je $f(x)$ neprekidna na segmentu $[a,b]$ i diferencijabilna na intervalu (a,b). Tada postoji $c\in(a,b)$ takva da je

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$



Geometrijski smisao teoreme je da postoji tačka $c\in(a,b)$ u kojoj je tangenta na grafik funkcije $y=f(x)$ paralelna pravoj kroz tačke $A(a,f(a))$ i $B(b,f(b))$.

Uopštenje ove teoreme je:

Teorema (Košijeva) Neka su $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne funkcije na segmentu $[a,b]$, diferencijabilne na intervalu (a,b), pričemu je $g'(x)\neq 0$, za svako $x\in(a,b)$. Tada postoji tačka $c\in(a,b)$ takva da je:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Jasno je da kada u Košijevoj teoremi uzmemo $g(x)=x$, dobijemo Lagranžovu teoremu.

Lopitalovo pravilo

Razmotrićemo način određivanja neodređenosti oblika $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$ primjenom izvoda

Teorema (Lopitalovo pravilo za neodređenost $\frac{0}{0}$)

Neka su f i g neprekidne funkcije i neka f i g imaju izvode u nekoj okolini tačke x_0 sa izuzetkom same tačke x_0. Neka je $g(x)\neq 0$ i $g'(x)\neq 0$ u tačkama te okoline i neka je $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$.

Tada, ako postoji $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, onda postoji i $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ i važi jednakost:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Primjer 1) Naći $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x \ln x}$

Rješenje $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x \ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)'}{(x \ln x)'} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{\ln x + 1} = 1$

2) Naći $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 6x}{2x^2}$

Rješenje $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos 6x}{2x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(1-\cos 6x)'}{(2x^2)'} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{6 \sin 6x}{4x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{6 \cos 6x}{1} = 9$

Teorema (Lopitalovo pravilo za neodređenost $\frac{\infty}{\infty}$)

Neka su f i g neprekidne funkcije, koje imaju izvode u okolini tačke x_0 i neka je

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$.

Neka je $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ u toj okolini. Tada, ako postoji $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, onda postoji i $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ i važi jednakost:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Primjer Naći $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{tg\,3x}{tg\,5x}$.

Rješenje $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{tg\,3x}{tg\,5x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}} =$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos^2 5x}{5\cos^2 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-10\sin 10x}{-6\sin 6x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{10}}{\cancel{6}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 10x}{\sin 6x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{10\cos 10x}{6\cos 6x} = \frac{5}{3}.$$

Ovaj zadatak smo mogli uraditi i na drugi način:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{tg\,3x}{tg\,5x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \left\| \begin{array}{l} x-\frac{\pi}{2}=t \\ x\to\frac{\pi}{2} \Rightarrow t\to 0 \end{array} \right\| = \lim_{t\to 0} \frac{tg\left(\frac{3\pi}{2}+3t\right)}{tg\left(\frac{5\pi}{2}+3t\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{ctg\,3t}{ctg\,5t} = \lim_{t\to 0} \frac{tg\,5t}{tg\,3t} = \frac{5}{3}$$

Lopitalovo pravilo se koristi i u slučajevima računanja graničnih vrijednosti oblika $0^0, \infty^0, 1^\infty, 0\cdot\infty, \infty-\infty$.

Neodređenosti oblika $0^0, \infty^0, 1^\infty$ se svode na slučaj $0\cdot\infty$. Zaista, $\boxed{f^g = e^{g\ln f}}$

Neodređenost $0\cdot\infty$ se svodi na $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. To slijedi iz $f\cdot g = \dfrac{f}{\frac{1}{g}} = \dfrac{g}{\frac{1}{f}}$

Neodređenost $\infty - \infty$ se svodi na slučaj $\frac{0}{0}$.

Ovo slijedi iz $\quad f - g = \dfrac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f \cdot g}}$.

Primjer 1) Naći $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$

Rješenje

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x} = [\infty^0] = e^{\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg}x \cdot \ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\operatorname{ctg}x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{\sin^2 x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = e^{0\cdot 1} = e^0 = 1$$

2) Naći $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$

Rješenje:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}\left[\frac{0}{0}\right]} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}\cdot(-\sin 2x)\cdot 2}{2x}} = e^{-2\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}} =$$

$$= e^{-2\cdot 1\cdot 1} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

3) Naći $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$

Rješenje $\quad \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{\ln x(x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right]$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$